

Дослідження/

Леонід Долінський

Кандидат економічних наук,
доцент, докторант кафедри
економіко-математичного моделювання
Київського національного економічного
університету імені Вадима Гетьмана



Моделювання узагальненого кредитного рейтингу для групи об'єктів рейтингування

У статті розглянуто комбінаторну задачу розподілу індивідуальних кредитних рейтингів за рівнями національної рейтингової шкали та розроблено ймовірнісні моделі оцінювання узагальненого кредитного рейтингу відразу для декількох об'єктів рейтингування. Задача визначення узагальненого кредитного рейтингу для сукупності підприємств та/або боргових цінних паперів має значний науковий та практичний інтерес, оскільки узагальнений кредитний рейтинг є важливим орієнтиром для інвесторів – він надає кількісну оцінку сподіваної (середньої) ймовірності дефолту для певної множини подібних об'єктів.

Кредитно-інвестиційна діяльність на фінансовому ринку потребує попереднього оцінювання кредитної якості об'єктів капіталовкладень. Загальноприйнятим в усьому світі орієнтиром щодо надійності об'єктів кредитування або інвестування є кредитні рейтинги.

В Україні ще 1 квітня 2004 року з метою оцінювання кредитного ризику та визначення інвестиційної привабливості різних об'єктів ухвалено "Концепцію створення системи рейтингової оцінки регіонів, галузей національної економіки, суб'єктів господарювання" [1].

За ці роки система національної рейтингової оцінки інститутів та інструментів фінансового ринку пройшла кілька важливих етапів. Відзначимо, зокрема, введення в дію Постановою Кабінету Міністрів від 26.04.2007 р. № 665 [2] чинної редакції Національної рейтингової шкали (надалі – Національна шкала).

У попередній публікації автора з питань рейтингування [3] обґрунтовано, що **кредитний рейтинг** можна розглядати як узагальнену експертну оцінку ступеня кредитного ризику, з якої випливає ймовірність невиконання (непогашення) боргових зобов'язань (**ймовірність дефолту**). (**Дефолт** – відмова позичальника здійс-

нити своєчасно та в повному обсязі задекларовані (обіцяні) виплати).

Таким чином, кількісне оцінювання ступеня кредитного ризику об'єктів рейтингування полягає насамперед у обчисленні ймовірностей дефолту для кредитних рейтингів різних рівнів.

Систематизація та аналіз науково-практичних публікацій у сфері рейтингування, зокрема праць, наведених на офіційних Інтернет-сайтах провідних міжнародних рейтингових агентств [4], свідчить про поширення у світі індивідуальних кредитних рейтингів для окремих позичальників або боргових інструментів. На нашу думку, значний науковий та практичний інтерес має задача визначення *узагальненого (середнього) кредитного рейтингу* для сукупності підприємств та / або боргових цінних паперів, об'єднаних за галузевою, регіональною, груповою (корпоративною) та іншими ознаками. Зрозуміло, що таке об'єднання об'єктів рейтингування має відбуватися з дотриманням принципів здорового глузду, економічної раціональності, подібності основних ознак тощо. Отже, розглядатимемо лише ті сукупності об'єктів рейтингування, об'єднання яких за певними ознаками є доцільним.

Узагальнений кредитний рейтинг – важливий орієнтир, що надає кількісну оцінку сподіваної (середньої) ймовірності дефолту певної сукупності об'єктів (галузі, регіону, групи компаній тощо). Прикладами основних узагальнених рейтингів можна вважати суверенні кредитні рейтинги країн, кредитні рейтинги муніципалітетів та інших регіональних і місцевих громад, кредитні рейтинги фінансово-промислових і торговельно-промислових груп, холдингових компаній тощо.

Традиційний підхід до рейтингового оцінювання сукупності об'єктів полягає в аналізі їх консолідованих показників діяльності. На рівні групи компаній це насамперед аналіз консолідованої фінансової звітності. На рівні країни – аналіз макроекономічних показників. На жаль, таке усереднення в межах традиційного підходу призводить до втрати значної частини важливих індивідуальних властивостей окремих об'єктів, а присвоєння узагальненого рейтингу залишається неформалізованим та суб'єктивним. Запропонований у статті авторській підхід на основі логіко-ймовірнісного моделювання з урахуванням надійності кожного індивідуального об'єкта дає змогу формалізувати процедуру визначення

узагальнених кредитних рейтингів та підвищити завдяки цьому достовірність результатів рейтингування.

У попередній праці [3] було висвітлено основні засади ймовірнісного підходу до моделювання кредитних рейтингів. У цьому дослідженні зосередимося на визначенні узагальнених кредитних рейтингів для сукупності об'єктів рейтингування.

Метою дослідження є моделювання можливих варіантів комбінацій сукупності індивідуальних кредитних рейтингів за рівнями Національної шкали з подальшим визначенням узагальнених кредитних рейтингів та відповідних ймовірностей дефолтів.

Отже, нехай існує множина об'єктів рейтингування, загальна кількість яких дорівнює N . Кредитні рейтинги присвоюють за Національною шкалою, загальна кількість рівнів рейтингу за якою дорівнює n . Для кожного рівня кредитного рейтингу H_i існує максимальне граничне значення ймовірності дефолту α_i , тобто у формалізованому вигляді:

$$\forall i: \exists \alpha_i, \alpha_i \in [0; 1], i = \overline{1, n}.$$

Нумерація рівнів рейтингу здійснюється згори донизу, причому чим вищий рівень кредитного рейтингу, тим менший його порядковий номер та тим нижча ймовірність дефолту, тобто:

$$\forall i: \alpha_i \leq \alpha_{i+1}.$$

У статті [3] було доведено: якщо ввести величину $P(H_i)$ як ймовірність того, що об'єкт рейтингування матиме індивідуальний кредитний рейтинг H_i за Національною шкалою, то його ймовірність дефолту $P(A)$ дорівнюватиме:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/H_i) \times P(H_i), \quad (1)$$

де $P(A/H_i)$ – ймовірність дефолту об'єкта за умови, що його рейтинг належить до рівня H_i Національної шкали. Причому справедливою є нерівність:

$$\forall i: P(A/H_i) \leq \alpha_i.$$

Відповідно до рівняння (1), знаючи ймовірності потрапляння об'єкта до кожного з рівнів рейтингової шкали $P(H_i)$ та максимальні граничні значення ймовірностей дефолту α_i , завжди можна розрахувати значення ймовірності дефолту за індивідуальним кредитним рейтингом певного об'єкта рейтингування.

На нашу думку, аналітична модель (1) цілком придатна й для оцінювання ймовірності дефолту за узагальненим кредитним рейтингом сукупності

об'єктів рейтингування. Тому задача визначення ймовірності дефолту для групи об'єктів за відомих значень ймовірностей α_i зводиться до оцінювання ймовірностей $P(H_i)$ для їх узагальненого кредитного рейтингу.

ВИЗНАЧЕННЯ РІВНЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО КРЕДИТНОГО РЕЙТИНГУ

Розглянемо задачу знаходження найімовірнішого (сподіваного) рівня узагальненого рейтингу для сукупності об'єктів. Для розв'язання цієї задачі необхідно спочатку обчислити ймовірності потрапляння кожного з об'єктів до кожного з рівнів рейтингу, а потім визначити відповідне сподіване значення випадкової величини рівня узагальненого кредитного рейтингу.

Оскільки кожний j -тий об'єкт рейтингування ($j = \overline{1, N}$) може отримати будь-який i -тий рівень рейтингу ($i = \overline{1, n}$), то кожний індивідуальний рейтинг H_{ij} визначатиметься вектором-стовпчиком ймовірностей P_{ij} . Тоді множина елементарних подій $\{\Omega\}$ щодо можливих результатів рейтингування об'єктів у контексті ймовірностей присвоєння того чи іншого рівня рейтингу описуватиметься матрицею ймовірностей R , розмірністю $n \times N$, тобто:

$$R = \begin{pmatrix} P_{11} \dots P_{1j} \dots P_{1N} \\ \dots \dots \dots \\ P_{i1} \dots P_{ij} \dots P_{iN} \\ \dots \dots \dots \\ P_{n1} \dots P_{nj} \dots P_{nN} \end{pmatrix}.$$

Користуючись властивістю повної групи подій щодо присвоєння рівнів кредитного рейтингу, можемо щодо кожного окремого об'єкта рейтингування застосувати рівність:

$$\forall j: \sum_{i=1}^n P_{ij} = 1. \quad (2)$$

Отже, у кожному стовпчику матриці R сума значень ймовірностей дорівнюватиме одиниці.

Коли для j -того об'єкта рейтингування отримання i -того рівня рейтингу є набагато ймовірнішим за інші, то у стовпчику, що відповідає цьому об'єкту, саме в цьому i -тому рядку значення P_{ij} наблизатиметься до одиниці, а всі інші значення ймовірностей у стовпчику прямуватимуть до нуля. В такому разі можна стверджувати про очевидне модальне значення рівня індивідуального рейтингу для окремого об'єкта рейтингування.

Зрозуміло, що коли всі об'єкти рейтингування мають очевидні модальні значення та всі вони відповідають одному й тому ж рівню кредитного рейтингу H' , то й модальне значення рівня узагальненого кредитного рейтингу для цієї сукупності об'єктів дорівнюватиме H' . Згідно з матрицею ймовірностей R цей випадок означатиме, що у певному i -тому рядку цієї матриці знаходиться найбільше значення ймовірностей P_{ij} для всіх $j = \overline{1, N}$ об'єктів.

Зрозуміло, що у загальному випадку найбільше значення ймовірностей P_{ij} можуть бути розкидані по різних рядках матриці R .

Пропонуємо для опису всіх можливих варіантів розподілу об'єктів за рівнями рейтингової шкали та розв'язання задачі оцінювання рівня узагальненого кредитного рейтингу скористатися методами комбінаторики. Отже, проаналізуємо всі можливі комбінації щодо розподілу N об'єктів рейтингування за n рівнями рейтингової шкали. Спочатку оцінимо загальну кількість таких комбінацій.

Для кожного об'єкта існує n рівнів кредитних рейтингів. Тоді для двох об'єктів кількість комбінацій розподілу їх рейтингів за рівнями національної шкали становитиме n^2 , а для N об'єктів рейтингування відповідно n^N варіантів комбінацій кредитних рейтингів. Тобто множина елементарних подій $\{\Omega\}$ щодо можливих результатів рейтингування об'єктів матиме таку потужність:

$$L(n, N) = n^N. \quad (3)$$

Оскільки порядок присвоєння об'єктам індивідуальних рейтингів є несуттєвим (так звана "непорядкована множина"), але можливі варіанти розподілу об'єктів за рівнями мають різнитися між собою хоча б одним елементом, ці комбінації є **сполученнями**.

УМОВНИЙ ПРИКЛАД РОЗПОДІЛУ ПІДПРИЄМСТВ ЗА РІВНЯМИ РЕЙТИНГУ

Розглянемо умовний приклад. Нехай рейтингова шкала складається лише з двох основних рівнів (таке укрупнення на практиці можливе, наприклад, при поділі всіх кредитних рейтингів на дві категорії – інвестиційну та спекулятивну), а множина об'єктів рейтингування складається лише з чотирьох підприємств, які входять до фінансово-промислової групи. Розв'яжемо комбінаторну задачу роз-

поділу підприємств за рівнями рейтингу.

Відповідно до введених раніше позначень маємо: $n = 2$, $N = 4$. Тоді загальна кількість варіантів сполучень за формулою (3) дорівнює: $n^N = 16$.

Усі варіанти сполучень для множини підприємств $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ наведено в таблиці.

Комбінації рейтингів підприємств		
Варіанти сполучень	Рівень рейтингу	
	1	2
1	A_1, A_2, A_3, A_4	–
2	A_1, A_2, A_3	A_4
3	A_1, A_2, A_4	A_3
4	A_1, A_3, A_4	A_2
5	A_2, A_3, A_4	A_1
6	A_1, A_2	A_3, A_4
7	A_1, A_3	A_2, A_4
8	A_1, A_4	A_2, A_3
9	A_2, A_3	A_1, A_4
10	A_2, A_4	A_1, A_3
11	A_3, A_4	A_1, A_2
12	A_1	A_2, A_3, A_4
13	A_2	A_1, A_3, A_4
14	A_3	A_1, A_2, A_4
15	A_4	A_1, A_2, A_3
16	–	A_1, A_2, A_3, A_4

Вищенаведена матриця R для $n = 2$, $N = 4$ матиме такий вигляд:

$$R_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \end{pmatrix}$$

Виходячи з матриці $R_{2 \times 4}$, можемо кожному з наведених у таблиці варіантів сполучень співставити відповідну ймовірнісну оцінку.

Так, одночасне потрапляння всіх індивідуальних кредитних рейтингів до першого рівня рейтингової шкали (варіант сполучень № 1 з таблиці) описуватиметься добутком ймовірностей $P_{11} \times P_{12} \times P_{13} \times P_{14}$, а потрапляння всіх індивідуальних рейтингів до другого рівня шкали (варіант № 16) має ймовірність реалізації $P_{21} \times P_{22} \times P_{23} \times P_{24}$.

Можна стверджувати: якщо всі об'єкти рейтингування отримали один і той же рівень кредитного рейтингу H_i (у наведеному прикладі варіанти №1 та № 16), то й узагальнений кредитний рейтинг сукупності цих об'єктів дорівнює цьому рівню H_i . Лише в такому випадку присвоєння узагальненого кредитного рейтингу є *об'єктивним та однозначним*.

У загальному випадку ймовірність $P(H_i)$ об'єктивного присвоєння узагальненого кредитного рейтингу рівня H_i є добутком елементів відповідного i -того рядка матриці ймовірностей R . У формалізованому вигляді це можна записати так:

$$\forall i: P(H_i) = \prod_{j=1}^N P_{ij}, \quad (4)$$

Зазначимо, що відповідно до вищевказаного прикладу ймовірності об'єктивного присвоєння узагальненого кредитного рейтингу дорівнюють:

$$P(H_1) = P_{11} \times P_{12} \times P_{13} \times P_{14}$$

$$\text{та } P(H_2) = P_{21} \times P_{22} \times P_{23} \times P_{24}.$$

Таким чином, для кожного рівня рейтингової шкали є лише один варіант сполучень об'єктів рейтингування: якщо визначена оцінка узагальненого кредитного рейтингу є *об'єктивною*. Тому загальна кількість таких об'єктивних оцінок дорівнюватиме кількості рівнів n рейтингової шкали.

В усіх інших випадках присвоєння узагальненого рейтингу є *суб'єктивним* та залежить від прийнятої системи гіпотез.

Отже, для всієї множини сполучень об'єктів за рівнями рейтингу, наведених у таблиці, можна задати таке *правило*: присвоєння узагальненого рейтингу на рівні 1 (вищий рівень) можливе лише за умови, що не менше, ніж три будь-яких підприємств з чотирьох мають індивідуальний рейтинг рівня 1, а в усіх інших випадках сукупності присвоюється узагальнений рейтинг на рівні 2.

Прийняті експертні правила фактично ділять всю множину варіантів сполучень підприємств за рівнями рейтингу на декілька *підмножин* S_i , кожна з яких відповідає певному рівню узагальненого рейтингу H_i .

Наприклад, за прийнятого експертного правила присвоєнню узагальненого рейтингу рівня 1 відповідатиме підмножина S_1 , яка містить у собі варіанти сполучень 1–5 з таблиці. Тоді для оцінювання ймовірності присвоєння узагальненого кредитного рейтингу рівня 1 серед усієї множини комбінацій добутків ймовірностей, які входять у матрицю $R_{2 \times 4}$, потрібно вибрати лише ймовірності, що відповідають реалізації варіантів 1–5 з таблиці та скласти ймовірності цих несумісних подій. Отримаємо:

$$P(H_1) = P_{11} \times P_{12} \times P_{13} \times P_{14} + P_{11} \times P_{12} \times P_{13} \times P_{24} + P_{11} \times P_{12} \times P_{23} \times P_{14} + P_{11} \times P_{22} \times P_{13} \times P_{14} + P_{21} \times P_{12} \times P_{13} \times P_{14}.$$

Аналогічно можна розрахувати й ймовірність $P(H_2)$.

У загальному вигляді відповідно до отриманих за експертними правилами підмножин S_i ймовірність присвоєння узагальненого кредитного рейтингу $P(H_i)$ дорівнюватиме:

$$\forall i: P(H_i) = \sum_{S_i} P_{i1} \times P_{i2} \times \dots \times P_{iN}, \quad (5)$$

Підставивши ці ймовірності у рівняння (1), можемо оцінити ймовірність дефолту фінансово-промислової групи на основі узагальненого кредитного рейтингу.

Зрозуміло, що на практиці, за наявності 10 основних рівнів національної шкали [2], навіть без урахування проміжних рівнів кредитних рейтингів ця комбінаторна задача стає вельми масштабною та трудомісткою. Наприклад, для чотирьох підприємств загальна кількість варіантів сполучень їх рівнів кредитних рейтингів становитиме $10^4 = 10\,000$, з яких загальна кількість варіантів, що надають об'єктивну оцінку узагальненого рейтингу, дорівнює 10. У всіх інших 9 990 варіантах узагальнений кредитний рейтинг визначається суб'єктивно – експертним шляхом за допомогою прийнятої системи гіпотез (експертних правил).

ПЕРЕВІРКА АДЕКВАТНОСТІ ЕКСПЕРТНИХ ПРАВИЛ

Введемо для підрахунку кількості варіантів сполучень, які за експертним правилом віднесено до підмножини S_i , що відповідає рівню узагальненого рейтингу H_i , умовне позначення $L(S_i)$. Іншими словами, $L(S_i)$ є потужністю підмножини S_i . Так, у наведеному вище прикладі $L(S_1) = 5$.

Тоді, з метою перевірки адекватності обраних експертних правил щодо присвоєння узагальнених рейтингів H_i , для кожного i -того рівня рейтингу доцільним є обчислення абсолютного лінійного відхилення $d(H_i)$, яке розраховуватиметься за формулою:

$$\forall i: d(H_i) = \left| P(H_i) - \frac{P(H_i)}{L(S_i)} \right|. \quad (6)$$

Рівняння (6) дає змогу оцінити абсолютне відхилення ймовірності $P(H_i)$ об'єктивного присвоєння узагальненого кредитного рейтингу від середнього значення ймовірностей реалізації варіантів сполучень, які за експертним правилом віднесено до певного рівня узагальненого рейтингу H_i .

Прийняття рішень щодо рівня узагальненого кредитного рейтингу за критерієм, що описується формулою (6), ми вважаємо інтуїтивно зрозумілими. Якщо величина відхилення $d(H_i)$ значна, необхідно змінити

правило поділу варіантів сполучень за узагальненими рівнями рейтингу.

Відповідно до наведеного вище прикладу лінійне відхилення $d(H_1)$ є різницею між величинами $P(H_1) = P_{11} \times P_{12} \times P_{13} \times P_{14}$ та $P(H_1)/5$. Зрозуміло, що оскільки наведені у таблиці варіанти сполучень № 6–16 не містять більшості елементів у рівні рейтингу 1, то зміна правила щодо узагальненого рейтингу H_1 у бік збільшення кількості прийнятих варіантів призведе до значного збільшення величини $d(H_1)$. Тому включення у вираз для $P(H_1)$ додаткових складових із числа варіантів сполучень № 6–16 недоцільне.

Зазначимо також, що сенс застосування критерію (6) втрачається за рівномірного розподілу ймовірностей індивідуальних рейтингів об'єктів та як наслідок – й узагальнених рейтингів відповідних груп об'єктів рейтингування. За таких умов усі ймовірності з матриці R дорівнюватимуть $P_{ij} = \frac{1}{nN}$, а відповідні ймовірності $P(H_i) = \frac{1}{n}$. Тобто всі ймовірності присвоєння певних узагальнених рейтингів будуть рівними та визначатимуться об'єктивно й однозначно, отже відхилення $d(H_i) = 0$.

Однак рівномірний розподіл можливий лише за нерозрізненості об'єктів рейтингування, що суперечить прийнятій у нашому дослідженні економічній постановці задачі, оскільки у дослідженні кожний окремий об'єкт рейтингування розглядається як унікальний, з індивідуальним значенням P_{ij} у матриці ймовірностей R .

ВИЗНАЧЕННЯ ПОТУЖНОСТІ ПІДМОЖИН, ЩО ВІДПОВІДАЮТЬ РІВНЯМ КРЕДИТНИХ РЕЙТИНГІВ

Загалом для оцінювання ймовірності $P(H_i)$ за адитивною моделлю (5) необхідно спочатку розрахувати кількість доданків $L(S_i)$, які входять у цю суму, тобто визначити потужності відповідних підмножин S_i .

Припустимо, задано експертне правило щодо кількості об'єктів k_i , які повинні отримати індивідуальний кредитний рейтинг певного рівня з метою присвоєння відповідного узагальненого кредитного рейтингу H_i сукупності цих об'єктів.

Оскільки одному об'єкту рейтингування неможливо присвоїти одночасно більш як один рейтинг певного рівня, то справедливою є умова:

$$\sum_{i=1}^n k_i = N. \quad (7)$$

Тепер визначимо кількість комбінацій N розрізаних невпорядкованих об'єктів за n -рівнями рейтингу, якщо k_1 об'єктів віднесено до рівня 1, k_2 об'єктів – до рівня 2, та, нарешті, k_n об'єктів – до рівня рейтингу n . З урахуванням умови (7), відповідно до [5, с. 12] кількість таких комбінацій $L(k_1, k_2, \dots, k_n)$ дорівнює:

$$L(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{N!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_n!}. \quad (8)$$

Тоді для обчислення кількості варіантів сполучень $L(S_i)$, які за експертними правилами віднесено до рівня узагальненого рейтингу H_i , необхідно скласти всі величини $L(k_1, k_2, \dots, k_n)$, що відповідають рейтингу H_i .

Зокрема, у наведеному вище прикладі величину $L(S_1)$, скориставшись формулою (8), можемо розрахувати так:

$$\begin{aligned} L(S_1) &= L(k_1 = 4, k_2 = 0) + L(k_1 = 3, k_2 = 1) = \\ &= \frac{4!}{4! \times 0!} + \frac{4!}{3! \times 1!} = 5. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що змінюючи експертні правила шляхом варіювання величинами k_i , можна отримувати різні значення $L(k_1, k_2, \dots, k_n)$ і $L(S_i)$, та, зрештою, різні сценарії присвоєння узагальнених рейтингів H_i .

Порівнюючи величини k_i з урахуванням умови (7) та підраховуючи кількість комбінацій $L(k_1, k_2, \dots, k_n)$ за формулою (8), необхідно розуміти, що загальна кількість таких комбінацій за всіма k_i разом дорівнює n^N . Тобто сума потужностей усіх підмножин дорівнює загальній потужності множини елементарних подій $\{\Omega\}$ щодо можливих результатів рейтингування об'єктів, яка визначається за формулою (3).

МУЛЬТИНОМІАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ КРЕДИТНИХ РЕЙТИНГІВ

Для присвоєння узагальненого кредитного рейтингу за експертними правилами корисною інформацією є оцінка ймовірності реалізації сценарію, за яким індивідуальні кредитні рейтинги розподілено за рівнями рейтингів саме у кількостях $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ з дотриманням умови (7).

Введемо додатну цілочисельну випадкову величину X_i , яка набуває дискретних значень k_i з множини $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, що відповідає кіль-

кості об'єктів, які отримали i -тий рівень індивідуального кредитного рейтингу, $i = 1, n$. Тобто випадкова змінна X_i дає змогу оцінити число потраплянь k_i об'єктів із сукупності з N об'єктів до кожного з рівнів Національної шкали. Причому випадкові події потрапляння індивідуального рейтингу об'єкта до того чи іншого рівня рейтингової шкали є взаємовиключними, а загальна кількість присвоєних індивідуальних рейтингів дорівнює кількості об'єктів рейтингування, отже, описується виразом (7).

Нехай для сукупності з N об'єктів рейтингування апріорно задані середні ймовірності \bar{p}_i потрапляння об'єктів до i -тих рівнів рейтингу, за умови, що $i = 1, n$. Тобто у матриці ймовірностей R відомі певні середні значення за рядками матриці (які залежно від прийнятої системи гіпотез усереднення значень p_{ij} розраховують за формулами середньої арифметичної або середньої геометричної). Оскільки випадкові події присвоєння індивідуальних рейтингів є несумісними та утворюють повну групу, умова (2) для середніх ймовірностей \bar{p}_i теж є правильною.

Отже, виконуються всі умови мультиноміального закону розподілу [5, с. 114]. Тому для визначення ймовірності того, що індивідуальні кредитні рейтинги розподілені за рівнями рейтингової шкали саме у кількостях $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, можна скористатися формулою:

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \frac{N!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_n!} \times \bar{p}_1^{k_1} \times \bar{p}_2^{k_2} \times \dots \times \bar{p}_n^{k_n}. \quad (9)$$

Наступним кроком для визначення за допомогою рівняння (9) ключового параметра – ймовірності присвоєння сукупності об'єктів узагальненого кредитного рейтингу $P(H_i)$, необхідно задати відповідні експертні правила, які ділять всю множину варіантів сполучень N об'єктів за n -рівнями рейтингу на підмножини S_i .

Зазначимо, що принциповою відмінністю визначення ймовірності $P(H_i)$ за допомогою моделі (9) від підходу, що описаний рівнянням (5), є перехід від індивідуальних значень ймовірностей P_{ij} для кожного з об'єктів рейтингування до усереднених значень ймовірностей \bar{p}_i для сукупності об'єктів. Такий підхід дає змогу суттєво знизити трудомісткість розрахунків, оскільки не потребує комбінаторного добору всіх варіантів з множини елементарних подій $\{\Omega\}$ за-

гальною потужністю n^N , тому є зручнішим у практичному застосуванні.

До того ж використання мультиноміального закону розподілу дає змогу оцінити, зокрема, математичне сподівання $M(k_i)$ та дисперсію $D(k_i)$ щодо випадкових значень кількості об'єктів рейтингування k_i з числа N об'єктів, які отримали саме i -тий рівень рейтингу поміж n -рівнів рейтингової шкали. З урахуванням умови (7), для всіх k_i , $i = \overline{1, n}$ можна записати такі формули:

$$M(X_i = k_i) = N \times \bar{p}_i, \quad (10)$$

$$D(X_i = k_i) = \sigma^2 = N \times \bar{p}_i \times (1 - \bar{p}_i). \quad (11)$$

Зазначимо, що для мультиноміального розподілу також відомі вирази для обчислення коваріації та коефіцієнта кореляції, проте, на нашу думку, розрахунок цих показників має сенс насамперед для реальних даних та виходить за межі нашого дослідження.

Відповідно до формул (10) – (11) бачимо, що математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X_i , яка набуває дискретних значень k_i з множини $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, не залежать від конкретних значень k_i , а залежить лише від кількості об'єктів N та середніх ймовірностей \bar{p}_i потрапляння цих об'єктів до i -тих рівнів рейтингу. Така простота обчислень за формулами (10) – (11) зумовлюватиме лег-

кість їх практичного застосування. Отже, імплементація основних положень мультиноміального закону розподілу ймовірностей до рейтингового оцінювання надійності підприємств може суттєво підвищити ефективність процедур визначення кредитних рейтингів.

ВИСНОВКИ

З огляду на важкий фінансовий стан вітчизняного фінансового ринку та переважної більшості його об'єктів, а також кризу довіри з боку стратегічних інвесторів наявність кредитних рейтингів знижує ступінь невизначеності. Крім того, рейтингова оцінка дає змогу підвищити точність прогнозування фінансових результатів кредитно-інвестиційних операцій у контексті своєчасності й повноти погашення боргових зобов'язань.

Запропоновані у статті ймовірнісні моделі узагальненого кредитного рейтингу дають змогу оцінювати ступінь кредитного ризику для певної сукупності об'єктів рейтингування з урахуванням надійності кожного індивідуального об'єкта. Визначення узагальненого рейтингу до групи об'єктів розглядається як комбіна-

торна задача розподілу індивідуальних кредитних рейтингів за рівнями Національної шкали. Отримані результати щодо присвоєних узагальнених кредитних рейтингів можуть стати важливим критерієм підтримки прийняття рішень у кредитно-інвестиційній політиці як на мікро-, так і на макрорівні. □

Література

1. Розпорядження Кабінету Міністрів України "Про схвалення Концепції створення системи рейтингової оцінки регіонів, галузей національної економіки, суб'єктів господарювання" від 01.04.2004 р. № 208-р.
2. Постанова Кабінету Міністрів України "Про затвердження Національної рейтингової шкали" від 26.04.2007 р. № 665.
3. Долінський Л. Моделювання кредитних рейтингів за національною та міжнародною рейтинговими шкалами // Вісник НБУ. — 2010. — № 10 — С. 50–54.
4. Інтернет-ресурси: <http://www.moody.com>; <http://www.fitchratings.com>; <http://www.standardandpoors.ru>.
5. Теория статистики с основами теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов / Под ред. И.И. Елисейевой. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 446 с.