

Долінський Л.Б.,
кандидат економічних наук,
доцент, докторант кафедри
економіко-математичного моделювання
ДВНЗ "Київський національний
економічний університет
імені Вадима Гетьмана"

ІМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ СПІЛЬНОГО ДЕФОЛТУ ПОЗИЧАЛЬНИКІВ

Побудовано ймовірнісні моделі спільних дефолтів підприємств на основі аналізу ймовірностей їх індивідуальних дефолтів. Для позичальників різної надійності розглянуто питання врахування в моделі чинника частки ступеня взаємозалежності.

The probabilistic models of the joint defaults of the enterprises on the basis of their individual defaults analysis are developed. The question of the level of correlation weighting factor inclusion to the model is examined for debtors with different reliability level.

Ключові слова: позичальники, ймовірнісна модель, спільні дефолти, умовна ймовірність, ступінь залежності, зовнішня підтримка.

В умовах невисокої кредитної якості більшості боргових зобов'язань, присутніх на вітчизняному фінансовому ринку, проблемні питання оцінювання кредитного ризику є важливими й актуальними як для фінансистів-практиків, так і для науковців-дослідників. У аспекті кількісного аналізу зручним та інформативним показником ступеня кредитного ризику (чи навпаки, надійності) є ймовірність дефолту позичальника.

Уточнимо тлумачення терміна "дефолт". Згідно з чинним українським законодавством це "виплата відсотків і основної суми за борговими зобов'язаннями позичальника, припинена без досягнення згоди з кредиторами щодо реструктуризації заборгованості до настання строку платежу"¹. Узагальнивши основні дефініції дефолту, які надають електронні енциклопедичні словники², провідні рейтингові агентства³ й чинна нормативна база, пропонуємо таке визначення: *дефолт* — це відмова від виконання або неналежне виконання позичальником власних боргових зобов'язань, яка пов'язана з нездатністю або небажанням виконати ці зобов'язання *своєчасно (у строк)* та *в повному обсязі*, що веде до порушення умов кредитної угоди та надає кредиторіві право почати процес урегулювання заборгованості.

Слід зазначити, що в межах цього дослідження поняття дефолту розглядається дещо звужено, лише як результат фінансово-кредитної угоди, який складається із двох несумісних (альтернативних) випадкових подій: наявності дефолту, тобто

¹ Про затвердження Національної рейтингової шкали: Постанова КМУ від 26.04.2007 № 665.

² Див.: <http://ru.wikipedia.org>; <http://www.bank24.ru/info/glossary>; <http://banker.ua/glossary>; <http://abc.informbureau.com>.

³ Див.: <http://www.moodys.com>; <http://www.fitchratings.com>; <http://www.standardandpoors.ru>.

непогашення боргового зобов'язання, та відсутності дефолту, тобто погашення боргового зобов'язання.

Тематика науково-практичних досліджень, пов'язана з оцінюванням імовірностей дефолтів, є надзвичайно популярною на Заході. Проте переважна більшість західних праць у цій сфері присвячені обчисленню ймовірностей індивідуальних дефолтів боргових інструментів у розрізі наявних кредитних рейтингів на основі актуарного статистичного методу, який дістав назву "аналіз виживаності" (*survival analysis*)⁴. Найвідомішими серед таких праць є емпіричні дослідження незалежних учених під керівництвом Е. Альтмана⁵, а також емпіричні дослідження, паралельно проведені трьома найкрупнішими міжнародними рейтинговими агентствами⁶, які спиралися на значну статистику дефолтів. Разом із тим інші, нестатистичні, підходи у працях зарубіжних дослідників майже не розглядаються.

З-поміж вітчизняних праць, у яких розглянуто, зокрема, теоретичні питання моделювання кредитного ризику та дефолтів боргових інструментів, виокремимо сучасні дослідження А.Б. Камінського⁷ й Б.Ю. Кишакевича⁸.

У цілому питання розбудови ймовірнісних моделей дефолтів позичальників і боргових інструментів розкрито недостатньо. На нашу думку, в межах цієї тематики особливий науково-практичний інтерес становить визначення ймовірностей спільних дефолтів для пов'язаних (залежних) позичальників і боргових інструментів. У зв'язку з цим метою статті є побудова моделей оцінки ймовірностей спільного дефолту позичальників на основі ймовірностей їх індивідуальних дефолтів.

Можливі два тлумачення поняття спільного дефолту:

- одночасний дефолт декількох позичальників;
- спільна реалізація (перетин) сумісних випадкових подій дефолту декількох позичальників.

У аспекті фінансового моделювання нас цікавитиме дослідження не чинника часу⁹, а сумісних випадкових подій дефолтів.

Спільна реалізація дефолтів декількох позичальників у дефініціях теорії ймовірностей означає добуток імовірностей їхніх випадкових подій дефолту.

Введемо позначення: A_i — випадкова подія дефолту i -го позичальника ($i = 1, n$). Тоді в загальному вигляді ймовірність спільного дефолту n позичальників описуватиметься рівнянням:

⁴ Докладніше цей метод розглянуто в одній із попередніх праць автора (див.: Долінський Л.Б. Моделювання дефолтів за облігаційними позиками // *Фінанси України*. — 2009. — № 4. — С. 65—74).

⁵ *Cauoette J.B., Altman E.I., Narayanan P. Managing credit risk: The next great financial challenge*. — L.: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

⁶ "Moody's" (<http://www.moody.com>); "Fitch Ratings" (<http://www.fitchratings.com>); "Standard & Poor's" (<http://www.standardandpoors.ru>).

⁷ *Камінський А.Б. Моделювання фінансових ризиків: Моногр.* — К.: ВПЦ "Київський університет", 2006. — 304 с.

⁸ *Кишакевич Б.Ю. Використання кореляції активів у моделюванні кредитного ризику портфеля* // *Науковий вісник НЛТУ України*. — 2009. — Вип. 19.8. — С. 235—240.

⁹ Вважатимемо спільні дефолти умовно одночасними, тобто такими, коли проміжок часу між дефолтами позичальників є дуже незначним порівняно з часовим горизонтом дослідження.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1A_2\dots A_{n-1}). \quad (1)$$

Формула добутку ймовірностей (1) застосовна до залежних випадкових подій дефолтів позичальників. У разі незалежності дефолтів позичальників рівняння (1) істотно спрощується:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i). \quad (2)$$

Таким чином, згідно з рівнянням (2) в разі незалежності дефолтів позичальників імовірність їх спільного дефолту є добутком імовірностей індивідуальних (автономних) дефолтів кожного з них. Як бачимо, розрахунок імовірностей спільного дефолту не складний.

Набагато важчою задачею є обчислення ймовірності спільного дефолту за існування залежності між дефолтами окремих позичальників, що в термінах умовних імовірностей описується рівнянням (1). Складність практичного використання цього рівняння зумовлена відсутністю значень відповідних умовних імовірностей.

Провідні рейтингові агентства у своїй діяльності з визначення кредитних рейтингів розв'язують проблему оцінки умовних імовірностей експертним шляхом, аналізуючи позичальників із різною кредитоспроможністю (надійністю) та взаємозалежність їхніх дефолтів.

Розглянемо питання експертного аналізу ступеня залежності для двох позичальників, а потім спробуємо узагальнити отримані висновки.

Спільні дефолти для двох позичальників різної надійності

У деяких випадках можна спробувати експертно оцінити ступінь залежності випадкових подій дефолтів двох позичальників, аналізуючи комплекс фундаментальних чинників якісного й кількісного характеру. Так, у методиках глобального рейтингового агентства “Moody’s Investors Service” наведені приклади оцінювання ймовірності спільних дефолтів для банківських установ¹⁰, а також для регіональних і місцевих адміністрацій¹¹, які фактично можна описати моделлю (1). Із метою використання моделей спільних дефолтів, приміром, для банків передбачене попереднє оцінювання міри зовнішньої підтримки. “Moody’s” виділяє 4 джерела-можливої зовнішньої підтримки банків:

- 1) материнська підтримка (з боку материнського банку або фінансової групи);
- 2) підтримка пов'язаної фінансово-промислової групи компаній (холдингу);
- 3) підтримка регіональної або місцевої адміністрації;
- 4) системна підтримка (з боку держави та/або центрального банку).

¹⁰ Moody’s Investors Service Rating Methodology “Incorporation of Joint Default Analysis into Moody’s Bank Rating Methodology”. — February, 2007: [Електр. ресурс]. — <http://www.moody.com>.

¹¹ Moody’s Investors Service Special Comment “Proposal to Apply Joint Default Analysis to Regional and Local Governments”. — December, 2005: [Електр. ресурс]. — <http://www.moody.com>.

Причому джерела підтримки відразу проранжовані в тій послідовності, в якій вони аналізуються. Таку процедуру послідовного аналізу джерел підтримки агентство “Moody’s” називає *компонентним підходом*.

На нашу думку, в Україні на підтримку першого типу можуть розраховувати банки, мажоритарними акціонерами яких є міжнародні фінансові групи; на підтримку другого типу — банки, що входять до складу потужних вітчизняних фінансово-промислових корпорацій. Підтримка третього типу в Україні за сучасного становища місцевих бюджетів та централізованого управління з боку Мінфіну є малоімовірною. На системну підтримку з боку НБУ (четвертий тип) у певній мірі можуть розраховувати всі вітчизняні банки.

Моделі спільного дефолту для регіональних і місцевих адміністрацій передбачають насамперед фінансову підтримку місцевих бюджетів із боку бюджетів вищого рівня (в Україні — за рахунок державного бюджету). Таким чином, моделі спільного дефолту двох позичальників із урахуванням чинників зовнішньої підтримки потребують розподілу позичальників на об’єкти вищого рівня (H) та нижчого рівня (L). У цьому випадку формулу (1) можна подати в такому вигляді:

$$P(L \cap H) = P(H) \cdot P(L/H), \quad (3)$$

де $P(H)$ — імовірність автономного дефолту позичальника вищого рівня, а $P(L/H)$ — імовірність дефолту позичальника нижчого рівня за умов, що подія дефолту H відбулася.

У методиках провідного рейтингового агентства “Moody’s” стосовно аналізу спільного дефолту (*joint default analysis*)¹² фактор підтримки пропонується визначати експертним шляхом у частках або відсотках. Для цього вводиться змінна S — частка зовнішньої підтримки (*support weighting factor*), $S \in [0;1]$.

Приміром, державні гарантії за позиками місцевих бюджетів розглядаються як 100-відсоткова підтримка з боку об’єкта вищого рівня. Разом із тим описуються випадки часткової підтримки (не достовірної, але можливої події), наприклад у разі важливості цього позичальника для економіки на національному, місцевому або регіональному рівні.

На нашу думку, запропонований “Moody’s” показник S , із погляду теорії множин, визначає ступінь *сумісності* множин випадкових подій дефолтів позичальників. Тобто цілковита відсутність підтримки ($S = 0$) означає *несумісність* випадкових подій дефолтів позичальників ($L \cap H = \emptyset$). Тоді дефолт позичальника нижчого рівня абсолютно не залежить від дефолту об’єкта вищого рівня й дорівнює $P(L)$. Задача оцінювання ймовірності їх спільного дефолту в такому випадку позбавлена сенсу.

В усіх інших випадках, за наявності підтримки, події дефолтів L і H можуть відбуватися разом, тобто, висловлюючись термінами теорії ймовірностей, вони є *сумісними* подіями.

¹² Moody’s Investors Service Special Comment “Proposal to Apply Joint Default Analysis to Regional and Local Governments”. — December, 2005: [Електр. ресурс]. — <http://www.moody.com>.

Аналізуючи спільні дефолти, що описуються моделлю (3), для сумісних випадкових подій L і H , розглянемо два крайніх випадки щодо умовної ймовірності $P(L/H)$:

- 1) *цілковита незалежність* події дефолту L від події дефолту H ;
- 2) *цілковита залежність* події дефолту L від події дефолту H .

У першому випадку отримаємо: $P(L/H) = P(L)$. Звідси формула (3) набуде вигляду: $P(L \cap H) = P(H) \cdot P(L)$, що є класичним рівнянням для добутку двох незалежних подій.

У другому випадку маємо: $P(L/H) = 1$, тобто реалізація події дефолту позичальника вищого рівня H завжди призведе до реалізації події дефолту позичальника нижчого рівня L . Тоді формула (3) набуде вигляду: $P(L \cap H) = P(H)$, тобто ймовірність спільного дефолту визначатиметься виключно ймовірністю індивідуального дефолту позичальника вищого рівня. Для другого випадку також справедливо, що $P(H/L) = P(H)/P(L)$, тобто дефолт позичальника нижчого рівня не завжди спричинятиме дефолт позичальника вищого рівня.

Розглянемо приклад. Підприємство-векселедавець виписало простий вексель та здійснило його аваль у банку. Ймовірність дефолту векселедавця дорівнює $P(L) = 0,05$, а банку оцінюється на рівні $P(H) = 0,01$. Потрібно визначити ймовірність непогашення вексельного зобов'язання.

Оскільки аваль за векселем — це безумовне (беззастережне) зобов'язання щодо його оплати в разі неплатежу векселедавця, підприємство-векселедавець може розраховувати на зовнішню підтримку з боку банку ($S = 1$), отже, множини їх дефолтів є сумісними. Звідси ймовірність неплатежу за векселем описується рівнянням спільного дефолту (3).

Розглянемо крайні випадки.

1. Банк і підприємство-векселедавець є *абсолютно незалежними* суб'єктами господарювання. Тоді ймовірність їх спільного дефолту за векселем дорівнюватиме: $P(L \cap H) = 0,05 \cdot 0,01 = 0,0005$, або 0,05 %.

2. Кредитоспроможність підприємства *цілком залежить* від банку. Тоді перетину подій їх спільного дефолту відповідатиме ймовірність: $P(L \cap H) = 0,01$, або 1 %, тобто буде у 20 разів вищою.

Тут варто зазначити, що за відсутності авалю, коли зовнішня підтримка $S = 0$, ймовірність дефолту за векселем: $P(L) = 0,05$, тобто була б ще у 5 разів вищою, ніж у попередньому випадку.

У всіх інших випадках, за наявності підтримки та часткової залежності подій індивідуальних дефолтів L і H , ймовірність їх спільного дефолту перебуватиме в межах: $0,0005 < P(L \cap H) < 0,01$.

Зрозуміло, що зі збільшенням *прямої* залежності (позитивної кореляції) випадкових подій L і H зростатиме й ймовірність їх спільного дефолту. Рідкісні випадки *оберненої* залежності ймовірностей дефолтів двох позичальників, на нашу думку, можливі, наприклад за певних схем фінансового шахрайства, коли дефолт однієї пов'язаної юридичної особи відбувається з метою поліпшення фінансового становища іншої афілійованої юридичної особи.

Проаналізувавши крайні випадки, розглянемо також проміжні ступені прямої залежності подій індивідуальних дефолтів.

Проміжні ступені прямої залежності індивідуальних дефолтів

У публічних методиках аналізу спільних дефолтів рейтингового агентства “Moody’s” пропонується враховувати проміжні ступені залежності між дефолтами в досить простий спосіб — шляхом введення змінної W — частки ступеня залежності (*correlation weighting factor*), $W \in [0;1]$.

За повної незалежності подій індивідуальних дефолтів $W = 0$, а за повної залежності $W = 1$. Усі проміжні випадки щодо значень W визначають члени рейтингового комітету “Moody’s” експертним шляхом у відсотках по трьох групах: низька взаємозалежність (0—30 %), середня (31—70 %) або висока (71—100 %) ¹³.

Зазначимо, що при перекладі цього терміна навмисно уникнено слова “кореляція”, оскільки запропонований агентством “Moody’s” показник W є лише апріорним (експертним) коефіцієнтом, являє собою спрощений підхід та математично має іншу природу, ніж коефіцієнт кореляції. Показник W визначає ступінь залежності випадкових подій дефолтів, причому він працює, тільки коли така взаємозалежність є прямою (позитивна кореляція). В подальших дослідженнях випадки оберненої залежності (негативної кореляції) можна буде врахувати з допомогою коефіцієнта кореляції, оскільки останній має ширший діапазон припустимих значень: $r \in [-1;1]$.

З урахуванням частки ступеня залежності W у методиках аналізу спільних дефолтів агентства “Moody’s” пропонується формула обчислення спільних дефолтів двох позичальників ¹⁴:

$$P(L \cap H) = W \cdot P(H) + (1 - W) \cdot P(L) \cdot P(H). \quad (4)$$

Вираз (4) є зручнішим у використанні порівняно із класичною моделлю (3), оскільки зникає потреба в попередньому оцінюванні умовної ймовірності $P(L/H)$. Разом із тим, хоча в зазначених методиках “Moody’s” це не вказано, можна стверджувати, що вираз (4) є лише наближеним емпіричним рівнянням, яке справедливе (коректне) за дуже істотних обмежень.

Спробуємо дослідити область припустимих значень для формули (4). Порівнявши праві частини виразів (3) і (4), отримаємо:

$$P(H) \cdot P(L/H) = W \cdot P(H) + (1 - W) \cdot P(L) \cdot P(H). \quad (5)$$

Проаналізуємо, за яких умов рівність (5) виконується. По-перше, очевидно, що у граничних випадках (за цілковитою незалежністю випадкових подій L і H , коли змінна $W = 0$, або навпаки — за цілковитою залежністю, коли $W = 1$) моделі оцінки (3) й (4) збігатимуться. Тобто у крайніх точках рівняння (5) є справедливим. По-друге, оскільки рівняння (4) є лінійним відносно змінної W , то малому приросту аргументу відповідатиме й малий приріст функції. Таким чином,

¹³ Moody’s Investors Service Special Comment “Proposal to Apply Joint Default Analysis to Regional and Local Governments”. — December, 2005: [Електр. ресурс]. — <http://www.moody.com>.

¹⁴ Там само.

спрощену формулу (4) можна використовувати також при значеннях W , близьких до граничних, тобто або за дуже слабкої, або за дуже сильної прямої залежності дефолтів двох позичальників.

Тепер доведемо математично, що в загальному випадку рівність (5) не виконується. Для цього, скориставшись загальновідомою формулою повної ймовірності, розпишемо ймовірність реалізації випадкової події дефолту H за наявності лише двох будь-яких протилежних гіпотез:

$$P(H) = P(B) \cdot P(H/B) + P(\bar{B}) \cdot P(H/\bar{B}), \quad (6)$$

де B та \bar{B} — протилежні гіпотези, тобто несумісні випадкові події, які утворюють повну групу.

Далі у правій частині рівняння (6) кожен доданок перетворимо з допомогою виразу (5). Тоді рівняння (6) набуде вигляду:

$$P(H) = (W \cdot P(B) + (1 - W) \cdot P(H) \cdot P(B)) + (W \cdot P(\bar{B}) + (1 - W) \cdot P(H) \cdot P(\bar{B})). \quad (7)$$

Спростивши рівняння (7), остаточно отримаємо: $P(H) = 1$. Одержаний математичний результат свідчить: застосування заміни (5) призводить до того, що подія автономного дефолту H стає не випадковою, а *достовірною* подією ($H = \Omega$). Підставивши значення $P(H) = 1$ та $H = \Omega$ до рівняння (4) та здійснивши низку перетворень, остаточно отримаємо: $P(L) = 1$.

Отже, математично доведено, що в загальному вигляді запропонована рейтинговим агентством “Moody’s” формула (4) є некоректною, оскільки незалежно від значень $W \in [0; 1]$ втрачається випадковий (імовірнісний) характер подій індивідуальних дефолтів L і H ($L = H = \Omega$). До того ж у загальному вигляді формула (4) не дає уявлення про їх спільні дефолти, тому що вона повністю вироджується.

Водночас взагалі відкидати спрощену формулу (4), на нашу думку, недоцільно, оскільки в околі крайніх значень $W = 0$ або $W = 1$ вона даватиме кращі результати, ніж звичайні формули для цілком незалежних або цілком залежних випадкових подій.

Аналіз спільних дефолтів для більш ніж двох позичальників

Покажемо, як можна застосовувати формулу (4) за потреби в аналізі спільних дефолтів більш ніж двох позичальників.

При існуванні трьох позичальників, із метою оцінювання ймовірності їх спільного дефолту, представимо випадкову подію H як добуток двох випадкових подій, тобто: $H = H_1 \cdot H_2$. Тоді вираз (4) набуде вигляду:

$$P(L \cap H_1 \cap H_2) = P(H_1 \cap H_2) \cdot (W + (1 - W) \cdot P(L)). \quad (8)$$

Прийнявши, що ступінь залежності між сумісними подіями дефолтів H_1 і H_2 вимірюється показником W_1 , та знову скориставшись формулою (4), рівняння (8) можна переписати так:

$$\begin{aligned} P(L \cap H_1 \cap H_2) &= \\ &= (W_1 \cdot P(H_2) + (1 - W_1) \cdot P(H_1) \cdot P(H_2)) \cdot (W + (1 - W) \cdot P(L)). \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді в загальному вигляді для оцінювання ймовірності спільного дефолту за апіорно заданих ймовірностей настання подій автономних дефолтів L, H_1, \dots, H_n , користуючися формулою (4), можна вивести таке рівняння:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n H_i \cap L\right) = \\ = (W + (1 - W) \cdot P(L)) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (W_i \cdot P(H_{i+1}) + (1 - W_i) \cdot P(H_i) \cdot P(H_{i+1})). \quad (10)$$

Таким чином ми отримали вираз для наближеного визначення ймовірності спільного дефолту для довільної кількості сумісних подій автономних дефолтів позичальників.

Зазначимо, що виведені нами рівняння (9), (10) мають ті самі переваги й недоліки, що й запропонована авторитетним рейтинговим агентством "Moody's" формула (4). З одного боку, ці ймовірнісні моделі зручні у практичному використанні, бо не потребують обчислення умовних ймовірностей, які входять у класичну формулу (1). З другого — область припустимих значень для коректного застосування формули обмежується точками, в яких існує дуже сильна або дуже слабка позитивна за тежність між усіма індивідуальними дефолтами позичальників.

Отже, в результаті дослідження нами було, по-перше, математично доведено некоректність застосування в загальному вигляді запропонованої рейтинговим агентством "Moody's" формули оцінювання спільного дефолту двох позичальників на основі показника частки ступеня залежності між їх автономними дефолтами; по-друге, знайдено область припустимих значень, у яких згадана вище формула є справедливою; по-третє, на основі цієї формули виведено ймовірнісні моделі оцінювання спільного дефолту для довільної кількості позичальників.

Одержані результати дали змогу зробити такі висновки:

— оскільки зростання кількості об'єктів ускладнює аналіз спільного дефолту через збільшення множини комбінацій перетину подій їх індивідуальних дефолтів, становить науковий інтерес комбінаторна задача обчислення в загальному випадку потужності множини всіх можливих перетинів індивідуальних дефолтів позичальників;

— із метою коректного визначення ймовірностей спільного дефолту за будь-якої можливої залежності між автономними дефолтами позичальників, особливо у складних випадках, перспективним є застосування методів кореляційного аналізу, який передбачає визначення парних, частинних і множинних коефіцієнтів кореляції.

Зроблені висновки відкривають простір для подальших наукових досліджень автора в цій сфері. Зокрема, в наступних публікаціях буде розглянуто комбінаторну задачу моделювання варіантів перетину індивідуальних дефолтів, а також методологію й інструментарій кореляційного аналізу спільного дефолту.